Praktikum S1
Bestimmung von Trägheitsmomenten

Alena Zwanzig (722348)
Harald Haakh (720708)

Messungen vom 19.04.2004

1 Direktionsmoment des Drehtisches

1.1 Messung

Anhand verschiedener Wägestücke übten wir auf den Drehtisch definierte Drehmomente aus. Die vorgespannte Feder des Drehtisches spannte oder entspannte sich daraufhin bis zum Erreichen des Gleichgewichtszustandes:

$$M = D\phi$$

Wegen der Vorspannung um ϕ_0 maßen wir jedoch nicht ϕ sondern $\phi_0 - \phi$, so dass aus der Gleichgewichtsbedingung nicht direkt das Direktionsmoment errechenbar ist.
Im $M(\phi)$ Schaubild (s.u.) muss jedoch D als Anstieg auftreten (mit negativem Vorzeichen, da über denjenigen Winkel aufgetragen wird, um den sich der Tisch zurückstellte). Das Programm *GnuPlot* errechnete für den Anstieg der Ausgleichsgeraden beim Ver- bzw. Entdrillen der Feder folgende Werte:

$$D_{verdrillen} = (12.2 \cdot 10^{-3} \pm 5 \cdot 10^{-4})\frac{Nm}{rad}$$

$$D_{entdrillen} = (7.1 \cdot 10^{-4} \pm 7 \cdot 10^{-4})\frac{Nm}{rad}$$

1.2 Messunsicherheit

Zusätzlich zur oben angegebenen statistischen Unsicherheit tritt noch die systematische Unsicherheit. Zu jeder Messung ergibt sich hier ein anderer Wert nach der Gleichung

$$u_{sys} = D(\frac{\partial D}{\partial m}u_m + \frac{\partial D}{\partial r}u_r + \frac{\partial D}{\partial \phi}u_\phi = \frac{gr}{\phi}u_m + \frac{mg}{\phi}u_r + \frac{mgr}{\phi^2}u_\phi \Leftarrow D = \frac{mgr}{\phi}$$

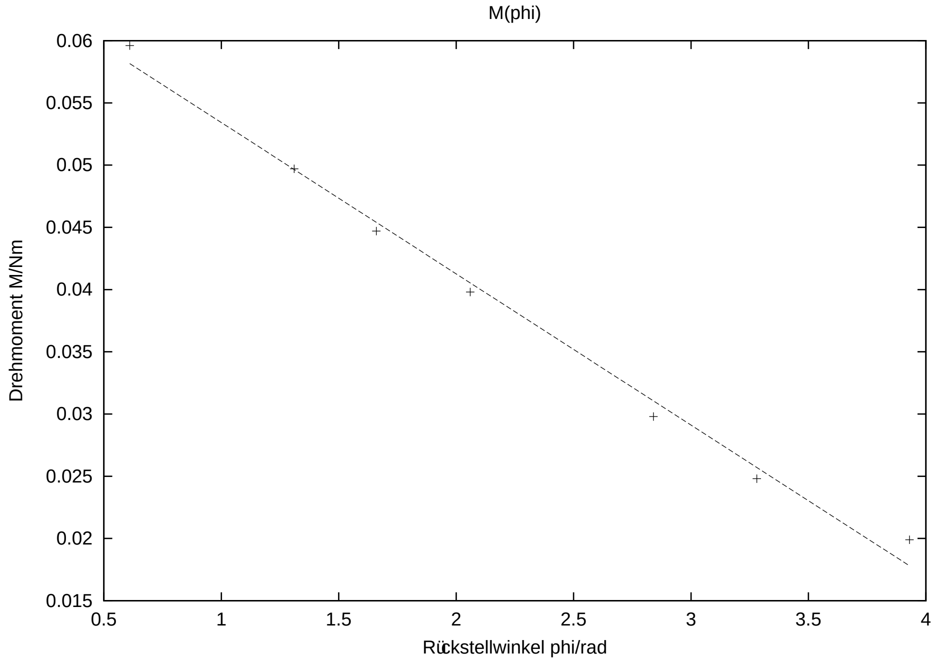
Den höchsten der auftretenden Werte nahmen wir als systematische Unsicherheit an.

Damit erhielten wir unter Annahme von $u_m = \pm 0.01g$, $u_\phi = \pm 0.25°$ und $u_d = 0.5mm$

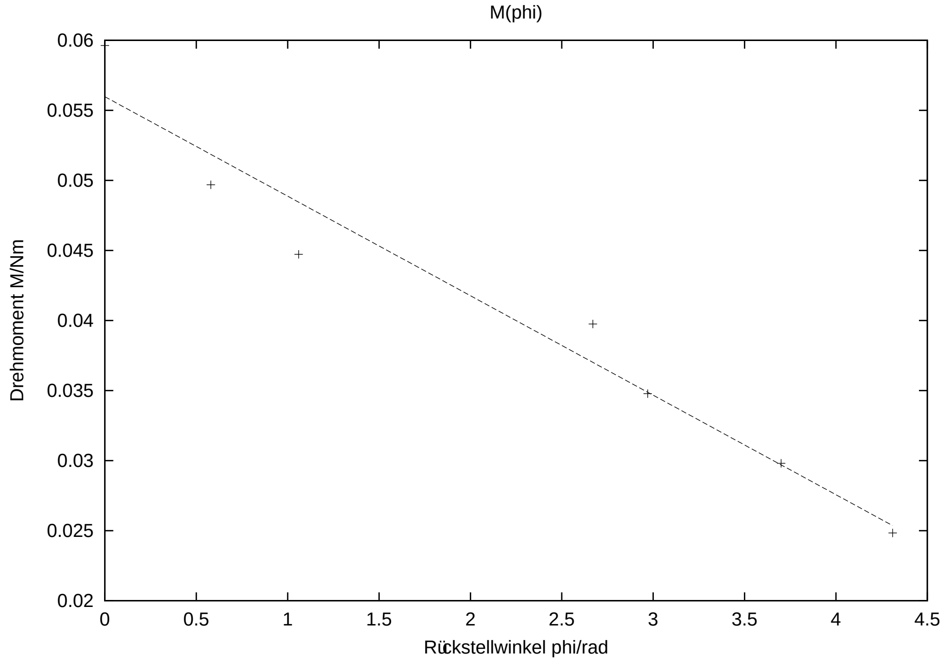
$$u_D = u_{stat} + u_{sys} = 1.1 \cdot 10^{-3}$$

Da bei der Messung des sich Entdrillenden Drehtisches die Feder regelmäßig an den Haltestäben rieb und somit zusätzliche Kräfte auf die Feder wirkten, ist dieser Wert wohl deutlich schlechter bzw. unbrauchbar. Bei der Messung der Schwingungen traten diese Störungen nicht auf.
Im Weiteren wird deshalb $D = D_{verdrillen} = (12.2 \pm 1.1)\frac{Nm}{rad}$ angenommen.

1.3 Diagramme



Verdrillen



Entdrillen

2 Trägheitsmoment des Drehtisches

Aus den Schwingungen des Drehtisches sollte sein Trägheitsmoment bestimmt werden. Als mittlere Schwingungsdauer ergab sich $T = (1.3 \pm 0.011)s$, wobei die Unsicherheit das Vertrauensintervall ist.
Die Messungenauigkeit ergibt dann aus:

$$u_J = \frac{T^2}{4\pi^2} u_D + \frac{2DT}{4\pi^2} u_T$$

Demnach beträgt das Trägheitsmoment

$$J_T = \frac{D}{4\pi^2} T^2 = (5.3 \pm 0.6) \cdot 10^{-4} kg \cdot m$$

3 Trägheitsmomente der Zylinder

Die Wägung der Zylinder und die Messung ihrer Durchmesser ergaben die Werte:

$$m_1 = 486.4g \pm 0.1g \qquad d_1 = 6.30cm \pm 0.2mm$$

$$m_1 = 243.4g \pm 0.1g \qquad d_1 = 6.30cm \pm 0.1mm$$

Als Messunsicherheit ergibt sich:

$$u_J = \frac{\partial J}{\partial m} + \frac{\partial J}{\partial r} = \frac{R^2}{2} u_m + mRu_r \Leftarrow J = \frac{mR^2}{2}$$

Demnach betragen ihre Trägheitsmomente bezüglich der Mittelachse

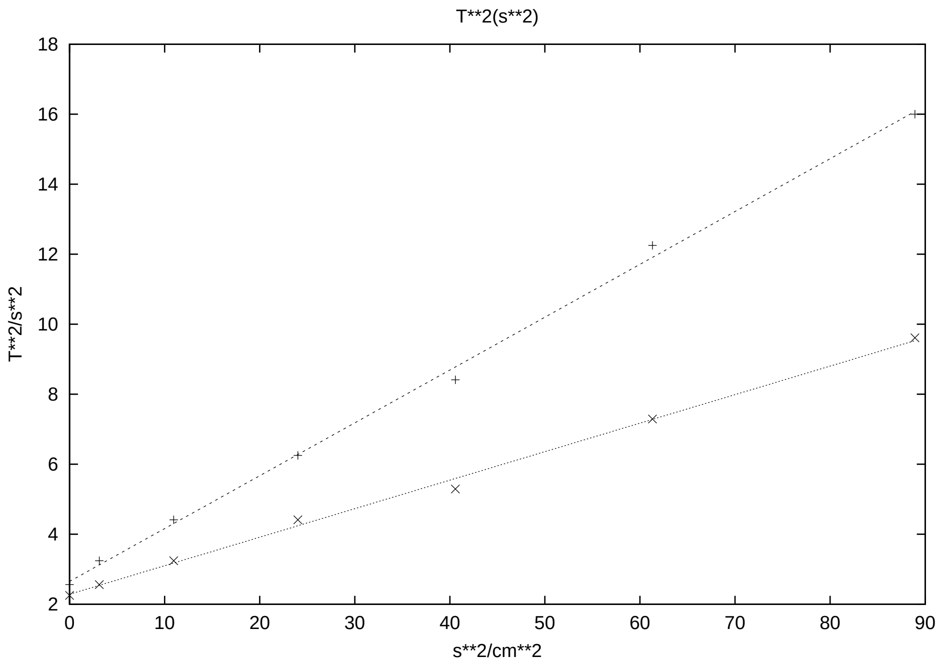
$$J_{Z,1} = 2.41 \cdot 10^{-4} \pm 3 \cdot 10^{-6} kg \cdot m^2$$

$$J_{Z,2} = 1.21 \cdot 10^{-4} \pm 1 \cdot 10^{-6} kg \cdot m^2$$

4 Steinerscher Satz

Legt man die Körper an verschiedenen Positionen auf den Drehtisch, so tritt eine Veränderung der Periodendauer auf.

Die Schaubilder von $T^2(s^2)$ ergeben recht gute Geraden.Damit gilt der Steinersche Satz.



Für die Geraden erhält man Gleichungen der Form

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D}(J_T + J_Z) + \frac{4\pi^2 m}{D} s^2 \qquad \hat{=} b + as^2$$

GnuPlot ermittelte

$$a_1 = 0.151 \pm 0.003 \qquad b_1 = 2.65 \pm 0.14$$

$$a_2 = 0.081 \pm 0.002 \qquad b_2 = 2.28 \pm 0.09$$

Damit lässt sich das Direktionsmoment bestimmen aus $D = \frac{4\pi^2 m}{a}$

$$D_1 = (12.7 \pm 0.3) \cdot 10^{-3} \frac{Nm}{rad}$$

$$D_2 = (11.9 \pm 0.3) \cdot 10^{-3} \frac{Nm}{rad}$$

$$\bar{D} = (12.3 \pm 0.3) \cdot 10^{-3} \frac{Nm}{rad}$$

Der Wert liegt im Bereich der oben gewonnenen Werte. Die Messunsicherheiten bestätigen die Vermutung, dass der aus den Schwingungen gewonnene Wert der bessere ist, da die hier zu messenden Größen exakter festzustellen waren, da über Zeitmessungen gemittelt wurde und Strecken statt sehr grober Winkel gemessen wurden.

5 Erneute Bestimmung des Trägheitsmomentes

Analoge Rechnung ergibt hier:

$$J_T = (5.4 \pm 0.3) \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

Womit der oben berechnete Wert bei verringerter Unsicherheit gut bestätigt werden kann.

6 Trägheitsmomente der Zylinder

Aus der Gleichung der Ausgleichsgeraden lässt sich das Trägheitsmoment der Zylinder bestimmen.

$$b = \frac{4\pi^2}{D}(J_T + J_Z) \Rightarrow J_Z = \frac{bD}{4\pi^2} - J_T$$

Die Messunsicherheit ergibt sich durch:

$$u_{J_Z} = \frac{b}{4\pi^2} u_d + u_{J,T} + \frac{D}{4\pi^2} u_b$$

Demnach betragen die Trägheitsmomente der Zylinder:

$$J_{Z,1} = (2.9 \pm 1.0) \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2$$

$$J_{Z,2} = (1.7 \pm 0.8) \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2$$

Die Werte liegen im Bereich der oben berechneten. Die Abweichung nach oben liegt wohl am Wert von b. Insgesamt fließen hier sehr viele Messgrößen ein, so dass die Messungenauigkeit fast im Bereich der Messgröße liegt.

Anlagen:

- Messprotokoll
- Berechnungen mit StarCalc

Potsdam, 30. April 2004

Alena Zwanzig Harald Haakh