

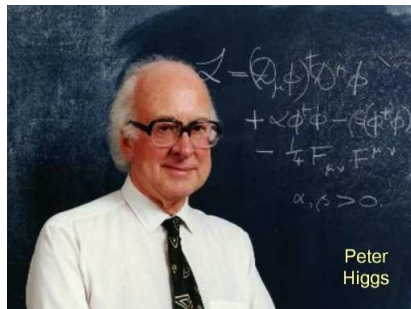
# Goldstone-Theorem und Higgs-Mechanismus

Harald Haakh. 14. Februar 2007.

**Zusammenfassung:** Goldstone-Theorem (Jeffrey Goldstone, 1961; rechtes Bild) und Higgs-Mechanismus (Peter Higgs, 1964; linkes Bild) beschreiben jeweils das Auftreten bestimmter Bosonen als Folge spontan gebrochener Symmetrien voraus.

Im Falle globaler Symmetrien erscheinen in der Lagrangedichte Goldstone-Teilchen, die in der Experimentellen Teilchenphysik nicht beobachtet werden. Im Falle lokaler Symmetrien erzeugt der Higgs-Mechanismus massive Vektorbosonen, während die unphysikalischen masselosen Teilchen durch eine geeignete Eichtransformation absorbiert werden können.

Hier wird zunächst das Konzept der spontanen Symmetriebrechung dargelegt, anschließend das Goldstone-Theorem im Falle der  $O(n)$ -Symmetrie und der Higgs-Mechanismus anhand der  $U(1)$ -Gruppe demonstriert.



## 1 Symmetrien...

Wir betrachten Symmetrieoperationen, die die Lagrangedichte unverändert lassen, d.h.

$$\delta\mathcal{L} = 0 \quad (1)$$

Zunächst muss man zwei grundlegende Arten von Symmetrien unterscheiden:

- *Diskrete Symmetrien:* Die Symmetrieoperation vermittelt zwischen diskreten Zuständen.  
Bsp.: Ladungskonjugation, Parität, Zeitumkehr
- *Kontinuierliche Symmetrien:* Es existiert ein Kontinuum von symmetrischen Zuständen, die durch eine Symmetrieoperation mit einem kontinuierlichen Parameter verbunden sind. Bsp.: Drehungen, Globale Phasentransformation, usw.

Außerdem werden wir unterscheiden, ob eine *lokale* oder eine *globale* Symmetrie vorliegt.

Ersteres wird zum Goldstone-Theorem führen, zweiteres zum Higgs-Mechanismus.

## 2 ... und spontane Symmetriebrechung

Von einer spontanen Symmetriebrechung spricht man, wenn sich die Systemsymmetrie in Abhängigkeit von einem Parameter abrupt ändert. Ein Beispiel aus der Alltagsphysik ist der ferromagnetische Phasenübergang beim Erreichen der Curie-Temperatur oder die Supraleitung.

Ein einfaches Beispiel ist das eines Skalarfeldes  $\phi$  mit einem Potential, typischerweise dem Ginzburg-Landau-Potential aus der Theorie der Supraleitung mit  $\lambda > 0$ .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{2}\lambda\phi^4\right)}_{V(\phi)} \quad (2)$$

Diese Lagrangedichte ist invariant unter der (globalen) Paritäts-Transformation

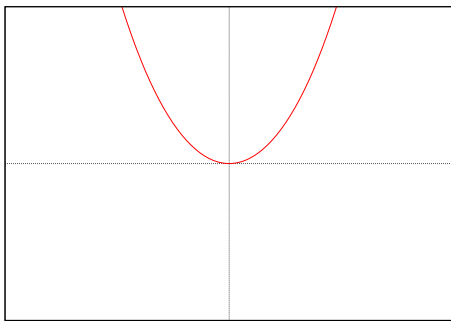
$$P : \phi \rightarrow -\phi \quad (3)$$

Der Grundzustand  $\langle \phi_0 \rangle$  ist der Zustand der die Energie

$$E = \int d^3x \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 + V(\phi) \quad (4)$$

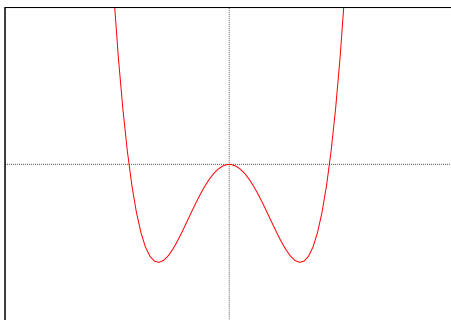
minimiert. (Ohne den Betrag, wäre sie nicht nach unten beschränkt, weshalb  $\lambda > 0$  gefordert wird.)

- 1. Fall  $\mu^2 > 0$



Hier ist der Grundzustand  $\langle \phi_0 \rangle = 0$  und bleibt es auch unter der Symmetriemodifikation  $P$ . Die Symmetrie ist erhalten.

- 2. Fall  $\mu^2 < 0$



Das Minimum ergibt sich aus den Bedingungen  $d_x E = 0$  und  $d_x^2 V > 0$ , man erhält zwei entartete Grundzustände

$$\langle \phi_0 \rangle = \pm \sqrt{-\mu^2/\lambda} =: \pm v \quad (5)$$

Wird einer dieser Zustände als Grundzustand gewählt, so hat dies wegen der Lagrangedichte keine Auswirkung auf die Physik. Das System ist aber nicht mehr P-invariant, denn

$$P \langle \phi_0 \rangle = -\langle \phi_0 \rangle \neq \langle \phi_0 \rangle \quad (6)$$

Nun wird ein verschobenes Feld  $\phi' := \phi - v$  definiert und die Lagrangedichte durch dieses Feld, d.h. durch die Abweichung ausgedrückt

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi') - V(\phi' + v) \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi') - |\mu|^2 \phi'^2 + \lambda \phi'^3 v - \frac{\lambda}{4} \phi'^4 + c \\ &\approx \frac{1}{2}[(\partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi') - 2|\mu|^2 \phi'^2] \end{aligned} \quad (7)$$

in NLO ergibt sich also die Lagrangedichte eines massiven Skalarfeldes mit Masse  $m = 2|\mu| > 0$ ! Die Masse kann demnach man als eine Art Rückstellkraft des Potentials interpretieren.

Bei völlig analogem Vorgehen im Falle von kontinuierlichen globalen Symmetrien werden allerdings nicht alle Felder massiv, sondern es treten auch masselose Felder auf: die Goldstone-Felder! In der Literatur, z.B. in [10] oder [1] findet man beispielsweise die (äquivalenten) Fälle von

- $U(1)$ : Rotation in der komplexen Ebene für Felder der Form  $\phi_1 + i\phi_2$  und
- $SO(2)$ : Rotation im  $\mathbf{R}^2$  für  $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ .

Diese wir hier aus Zeitgründen nicht gesondert vorrechnen, sondern den Fall  $O(2)$  skizzieren und anschließend  $O(n)$ , d.h.  $\phi \in \mathbf{R}^n$  als Beispiel für das Auftreten von Goldstone-Teilchen durch Symmetriebrechung betrachten.

### 3 Goldstone-Theorem

In einer Theorie mit gebrochener globaler Symmetrie existieren mindestens gleichviele masselose Skalarfelder wie gebrochene Generatoren.

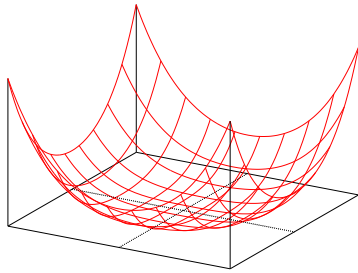
Am Beispiel der  $O(n)$ -Symmetrie soll das nun untersucht werden. Es sei  $\phi \in \mathbf{R}^n$  mit Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi^i) - \frac{1}{2}\mu^2 \phi_i \phi^i - \frac{1}{4}\mu^2 (\phi_i \phi^i)^2 \quad (8)$$

$\mathcal{L}$  ist unter  $O(n)$ -Transformationen invariant.

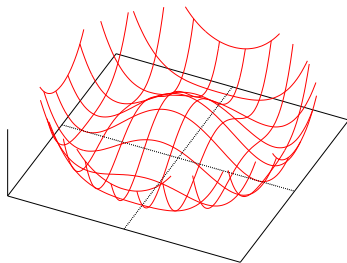
Beispiel in zwei Dimensionen  $O(2)$ :

- : 1. Fall  $\mu^2 > 0$



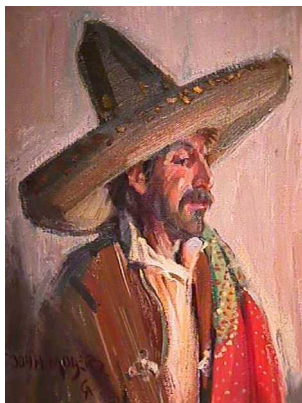
Wie gehabt existiert ein Minimum des Potentials, die Symmetrie bleibt erhalten.

- 2. Fall  $\mu^2 < 0$



Das Potenzial besitzt ein Kontinuum von Minima, die durch Rotation ineinander überführt werden können.

Wegen der Form wird dieses Potenzial auch "Mexican Hat" genannt [9]:



In  $n$  Dimensionen existieren im Falle  $\mu^2 < 0$  Minima  $V_{min} =: v$  des Potentials unter der Bedingung  $\phi_i \phi^i = \frac{-\mu^2}{\lambda}$ . Als Grundzustand wird

$$\langle \phi_0 \rangle_i = v \delta_{in} \quad (9)$$

gewählt. Wir können also immer noch globale Transformationen finden, die  $\mathcal{L}$  invariant lassen, nämlich die  $O(n-1)$ -Transformationen,

die auf die ersten  $n-1$  Feldkomponenten wirken.

- Die generierende Matrizen der  $O(n)$  seien

$$(L_{ij})_{kl} = -i(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (10)$$

Sie verschieben also gerade einen kanonischen Basisvektor auf einen anderen und erfüllen die Bedingungen von  $O(n)$ .

- Die verbleibenden Symmetrioperationen lassen sich beschreiben durch die  $L_{ij}$  mit  $i, j \neq n$ . Damit ist

$$(k_i < \phi_0 \rangle)_j = v(k_i)_{jl} \delta_{ln} = -iv \delta_{ij} \quad (11)$$

- Die gebrochenen Generatoren sind also die  $n-1$  Matrizen  $L_{in} =: k_i$ .

Statt der Subtraktion des Vakuumerwartungswertes wird die folgende Parametrisierung durch ein Feld  $\eta$  und  $1 \leq i \leq n-1$  Felder  $\xi_i$  und gewählt:

$$\phi = e^{i \frac{\xi_i k_i}{v}} (0, 0, \dots, 0, v + \eta) \quad (12)$$

Damit wird nun die Lagrangedichte durch die neuen Felder zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \partial_\mu \xi_i \partial^\mu \xi^i) - \frac{1}{2} \mu^2 (v + \eta)^2 \\ & - \frac{\lambda}{4} (v + \eta)^4 + \mathcal{O}(\eta^{>2}, \xi^{>2}, \partial) \end{aligned} \quad (13)$$

und wir haben ein massives Feld  $\eta$  mit Masse  $m = -2\mu^2 > 0$  und  $(n-1)$  masselose  $\xi_i$ -Felder erhalten. Also entspricht jedem gebrochenen Generator der ursprünglichen Gruppe ein masseloses Goldstone-Boson!

Dass diese Übereinstimmung allgemein gilt, ist noch zu zeigen. ObdA werde  $\mathcal{L}$  durch  $n$  reelle Felder ausgedrückt und sei unter der Untergruppe  $G$  invariant, nicht jedoch unter  $G' \supset G$ . Es seien  $T_\alpha$  die Generatoren von  $G'$ , und die Transformation von  $\phi$  folge

$$\delta \phi = -i \theta^\alpha L^\alpha \phi \quad (14)$$

$L^\alpha$  ist eine rein imaginäre antisymmetrische Matrix, da  $iL^\alpha$  reell ist und  $L$  hermitesch. Für die Invarianz von  $\mathcal{L}$  unter  $G$  brauchen wir die

Invarianz des Potenzials unter einer infinitesimalen Gruppenoperation:

$$\delta V = 0 = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \delta \phi_i = \delta \phi = -i \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \theta^\alpha L_{ij}^\alpha \phi_j \quad (15)$$

Das darf nun nicht von der Wahl von  $\theta^\alpha$  abhängen und somit gilt

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \phi_i} L_{ij}^\alpha \phi_j = 0 \quad \forall \alpha \quad (16)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} L_{ij}^\alpha \phi_j + \frac{\partial V}{\partial \phi_i} L_{ik}^\alpha = 0 \quad (17)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} \Big|_{\phi = \langle \phi_o \rangle} L_{ij}^\alpha \phi_j = 0 \quad (18)$$

Wobei im ersten Schritt ein weiteres mal abgeleitet wird und im zweiten verwendet wird, dass im Minimum  $\phi = \langle \phi_o \rangle$  des Potenzials  $\frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0$  verschwindet. Nähert man das Potenzial durch eine Taylorreihe, gilt in quadratischer Näherung

$$V = -\frac{1}{2} M_{ij}^2 (\phi - v)_i (\phi - v)_j + c \quad (19)$$

mit Massenmatrix  $M_{ij}^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} \Big|_{\phi = \langle \phi_o \rangle} = M_{ij}^2 \quad (20)$$

$$\Rightarrow M_{ij}^2 L_{ij}^\alpha \phi_j = 0 \quad \forall \alpha \quad (21)$$

Das ist bemerkenswert, denn nun ist *entweder*

- $L_{ij}^\alpha \phi_j = 0 \Leftrightarrow L^\alpha$  eine der verbleibenden  $m$ -dimensionalen Symmetrien des Grundzustandes generiert. In diesem Fall sagt 21 nichts über die Masse aus. *Oder*
- $M_{ij}^2 = 0$ , d.h. der Masseneigenwert verschwindet, wenn die Symmetrie gebrochen ist. Damit ist die Existenz von  $(n - m)$  Goldstone-Bosonen gezeigt.

## 4 Higgs-Mechanismus

Bisher wurden *globale* Symmetrien betrachten, während jetzt die Effekte in Theorien mit *lokaler* Eichinvarianz und spontaner Symmetriebrechung betrachtet werden. Diese Kombination führt zu einer Ausnahme im Goldstone-Theorem, so dass die Goldstone-Teilchen wieder absorbiert werden können.

Als Beispiel soll die  $U(1)$ -Theorie geladener skalarer Teilchen dienen (Abelsches Higgs-Modell). In der physikalischen Realität ist die Symmetrie in der  $U(1)$  *nicht* gebrochen! Sie bietet aber ein gutes Beispiel, um den Higgs-Mechanismus zu demonstrieren.  $\lambda > 0$  wie gehabt.

$$\mathcal{L} = |\mathcal{D}^\mu \phi|^2 - \mu^2 (\phi^* \phi) \quad (22)$$

$$- \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\phi = \frac{\phi_1 \pm i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad (23)$$

$\mathcal{L}$  ist invariant unter lokalen Eichtransformationen

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{iq\alpha(x)} \phi(x) \quad (24)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x) \quad (25)$$

und unter globalen  $U(1)$ -Rotationen

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\theta} \phi \quad (26)$$

- 1. Fall  $\mu^2 > 0$ : Hier ist die Symmetrie erhalten, und man erhält das normale Spektrum von skalarer Teilchen und masselosem Photon.
- 2. Fall  $\mu^2 < 0$ : Die Symmetrie ist gebrochen, es existieren kontinuierliche Vakuumzustände wie gehabt, und der Grundzustand wird als

$$\langle \phi_o \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad v \in \mathbf{R} \quad (27)$$

festgelegt.

Das verschobene Feld wird zweckmäßig parametrisiert durch  $\eta$  und  $\xi$  mit

$$\phi' = \phi - \langle \phi_o \rangle \quad (28)$$

$$\phi = e^{i\frac{\xi}{v}} \frac{(v + \eta)}{\sqrt{2}} \quad (29)$$

$$\approx \frac{(v + n + i\xi)}{\sqrt{2}} \quad (30)$$

Und die Lagrangedichte lässt sich ausdrücken durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta) - \underbrace{|\mu|^2 \eta^2}_{\text{Massenterm}} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (31)$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \xi \partial^\mu \xi) qv A_\mu (\partial^\mu \eta) + \frac{q^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu}_{\mathcal{K}} + \mathcal{O}$$

Es ist also wieder ein Massenterm für  $\eta$ , das entspricht den radialen Schwingungen, entstanden, der Term  $\mathcal{K}$  koppelt aber noch  $\eta$  und  $A$ . Dem hilft eine Eichtransformation ab:

$$\mathcal{K} = \frac{q^2 v^2}{2} (A_\mu \frac{1}{qv} \partial_\mu \xi) (A^\mu \frac{1}{qv} \partial^\mu \xi) \quad (32)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{qv} \partial_\mu \xi \quad (33)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-i\frac{\xi(x)}{v}} \phi(x) = \frac{(v + \eta)}{\sqrt{2}} \quad (34)$$

Diese schluckt aber gerade die zusätzlichen Terme in der gewählten Feldparametrisierung, so dass die Lagrangedichte nun

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta) - \underbrace{|\mu|^2 \eta^2}_{\text{massives Skalarfeld}} \quad (35)$$

$$- \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{q^2 v^2}{2} A'_\mu A'^\mu}_{\text{massives Vektorfeld}}$$

lautet.

In dieser Darstellung erkennt man

- ein massives Skalarfeld  $\eta$  mit Masse  $m_S = -2\mu^2$ , das sogenannte *Higgs-Boson*, und
- ein *massives* Vektorfeld mit Masse  $m_V = qv$ .
- Das  $\xi$ -Feld hingegen ist verschwunden.

Und zwar wurde es durch als longitudinale Komponente von  $A'$  absorbiert. Vor der spontanen Symmetriebrechung war das Vektorfeld  $A$  masselos und besaß wie alle masslosen Teilchen zwei Helizitätszustände. Dazu kamen den 2 Freiheitsgrade von  $\phi$  und  $\phi^*$ .

Nach Brechung der Symmetrie ist das Vektorfeld  $A'$  hingegen massiv und besitzt drei Helizitäten. Das Skalarfeld  $\eta$  besitzt nur einen

Freiheitsgrad, so dass die Bilanz ausgewogen ist.

Allerdings gilt dies nur in einer speziellen, der sogenannten *unitären Eichung*, in der nur physikalische Zustände in der Lagrangedichte erscheinen.

## 5 Das Higgs-Boson

Interessant ist die Betrachtung des Higgs-Mechanismus' insbesondere im Modell der elektroschwachen Wechselwirkung von Glashow-Weinberg-Salam mit der Eichgruppe  $SU(2) \times U(1)$ . Hierbei ist die Untergruppe  $U(1)$  ungebrochen während drei Generatoren der  $SU(2)$  verletzt sind. Auf diese Weise entstehen

- ein massives Skalarfeld, das Higgsboson
- ein masseloses Skalarfeld, das Photon des Elektromagnetismus
- drei massive Vektorbosonen  $W^\pm$  und  $Z^0$ .

Das Higgs-Boson ist bisher nicht beobachtet worden. Aus dem Standardmodell lässt sich seine Masse nicht vorhersagen, wohl aber die zur Masse proportionale Kopplung an andere Teilchen.

In den Experimenten am LEP (CERN) hätte es am ehesten in "Higgs-Strahlungs-Prozessen"  $e^+e^- \rightarrow Z^* \rightarrow HZ$  auftreten können. Aus dem kinematischen Limit

$$M_\eta \leq \sqrt{s_{LEP}} - M_Z = (206 - 91) \text{ GeV} = 115 \text{ GeV} \quad (36)$$

kann eine Untergrenze der Higgs-Masse angegeben werden. Auch Tevatron (Fermilab) hat bisher keine Hinweise geliefert.

Der 2007 am CERN mit einer Massenzentrumsenergie bis  $14 \text{ TeV}$  in Betrieb gehende LHC wird dieser hoffentlich Hinweise auf die Existenz oder Nicht-Existenz dieses letzten fehlenden Teilchens im Standardmodell geben können.

## Literatur

- [1] Ernest S. Abers and Benjamin W. Lee. *Gauge theories*. North-Holland Publishing Company.
- [2] Christian Egli. Spontane Symmetriebrechung und Higgs-Mechanismus. <http://www.itp.phys.ethz.ch/proseminar/partphys04/Egli.pdf>, Zürich, 2005.
- [3] Giorgio Giacomelli. *Introduzione alla fisica delle particelle elementari*. Universita' di Bologna, 2003.
- [4] Jeffrey Goldstone. Field theories with 'superconductor' solutions. *Nuovo Cim.*, 19:154–164, 1961.
- [5] Jeffrey Goldstone, Abdus Salam, and Steven Weinberg. Broken symmetries. *Phys. Rev.*, 127:965–970, 1962.
- [6] Peter W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509, 1964.
- [7] Peter W. Higgs. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. *Phys. Lett.*, 12:132–133, 1964.
- [8] Peter W. Higgs. Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons. *Phys. Rev.*, 145:1156–1163, 1966.
- [9] John Moyers. The stolen sombrero.
- [10] Chris Quigg. *Gauge theories of the strong, weak and electromagnetic interactions*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1983.